目　　录

小　　引

人类识自然，
探索穹研，
花明柳暗别有天，
谲诡神奇满目是，
气象万千。

往事几百年，
祖述前贤，
瑕疵讹谬犹盈篇，
蜂房秘奥未全揭，
待咱向前。

楔　　子

先谈谈我接触到和思考这问题的过程．始之以“有趣”．在看到了通俗读物上所描述的自然界的奇迹之一——蜂房结构的时候，觉得趣味盎然，引人入胜．但继之而来的却是“困惑”．中学程度的读物上所提出的数学问题我竟不会，或说得更确切些，我竟不能在脑海中想象出一个几何模型来，当然我更不能列出所对应的数学问题来了，更不要说用数学方法来解决这个问题了！在列不出数学问题，想象不出几何模型的时候，咋办？感性知识不够，于是乎请教实物，找个蜂房来看看．看了之后，了解了，原来如此，问题形成了，因而很快地初步解决了．但解法中用了些微积分，因而提出一个问题，能不能不用微积分，想出些使中学同学能懂的初

等解法．这样就出现了本文的第五节"浅化"（在这段中还将包括南京师范学院附中老师和同学给我提出的几种不同解法．这种听了报告就动手动脑的风气是值得称道的）．问题解得是否全面？更全面地考虑后，引出一个"难题"．这难题的解决需要些较高深或较繁复的数学．在本文中我作了些对比，以便看出蜂房的特点来．

在深入探讨一下之后发现，容积一样而用材最省的尺寸比例竟不是实测下来的数据，因而使我们怀疑前人已得的结论，因而发现问题的提法也必须改变，似乎应当是：以蜜蜂的身长腰围为准，怎样的蜂房才最省材料．这样问题就更进了一步，不是仅仅乎依赖于空间形式与数量关系的数学问题了，而是与生物体统一在一起的问题了，这问题的解答，不是本书的水平所能胜任的．

问题看清了，解答找到了．但还不能就此作结，随之而来的是浮想联翩．更丰富更多的问题，在这小册子上是写不完的，并且不少已经超出了中学生水平．但在最后我还是约略地提一下，写了几节中学生可能看不懂的东西，留些咀嚼余味罢！

总之，我做了一个习题．我把做习题的源源本本写下来供中学同学参考，请读者指正．

§1 有 趣

我把我所接触到的通俗读物中有关蜂房的材料摘引几条（有些用括号标出的问句或问号是作者添上的）．

如果把蜜蜂大小放大为人体的大小，蜂箱就会成为一个悬挂在几乎达 20 公顷的天顶上的密集的立体市镇.

一道微弱的光线从市镇的一边射来，人们看到由高到低悬挂着一排排一列列五十层的建筑物.

耸立在左右两条街中间的高楼上，排列着薄墙围成的既深又矮的，成千上万个六角形巢房.

为什么是六角形？这到底有什么好处？十八世纪初，法国学者马拉尔琪曾经测量过蜂窝的尺寸，得到一个有趣的发现，那就是六角形窝洞的六个角，都有一致的规律：钝角等于 109°28′，锐角等于 70°32′.（对吗？）

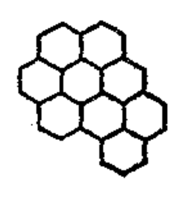


图 1

难道这是偶然的现象吗？法国物理学家列奥缪拉由此得到一个启示，蜂窝的形状是不是为了使材料最节省而容积最大呢？（确切的提法应当是，同样大的容积，建筑用材最省；或同样多的建筑材料，造成最大容积的容器.）

列奥缪拉去请教巴黎科学院院士瑞士数学家克尼格．他计算的结果，使人非常震惊．因为他从理论上的计算，要消耗最少的材料，制成最大的菱形容器（？），它的角度应该是 109°26′和 70°34′．这与蜂窝的角度仅差 2 分.

后来，苏格兰数学家马克劳林又重新计算了一次，得出的结果竟和蜂窝的角度完全一样．后来发现，原来是克尼格计算时所用的对数表（？）印错了！

小小蜜蜂在人类有史以前所已经解决的问题，竟要十八世纪的数学家用高等数学才能解决呢！

这些是多么有趣的描述呀！“小小蜜蜂”，“科学院院士”，“高等数学”，“对数表印错了”！真是引人入胜的描述呀！启发人们思考的描述呀！

诚如达尔文说得好：“巢房的精巧构造十分符合需要，如果一个人看到巢房而不备加赞扬，那他一定是个糊涂虫.”自然界的奇迹如此，人类认识这问题的过程又如此，怎能不引人入胜呢！

§2 困　惑

是的，真有趣. 这个十八世纪数学家所已经解决的问题，我们会不会？如果会，要用怎样的高等数学？大学教授能不能解？大学高年级学生能不能解？我们现在是二十世纪了，大学低年级学生能不能解？中学生能不能解？且慢！这到底是个什么数学问题？什么样的六角形窝洞的钝角等于$109°28'$，锐角等于$70°32'$？不懂！六角形六内角的和等于$(6-2)\pi=4\pi=720°$，每个角平均$120°$，而$109°28'$与$70°32'$都小于$120°$，因而不可能有这样的六角形.

既说“蜂窝是六角形的”，又说“它是菱形容器”，所描述的到底是个什么样子？六角形和菱形都是平面图形的术语，怎样用来刻划一个立体结构？不懂！

困恼！不要说解问题了，连个蜂窝模型都摸不清. 问题钉在心上了！这样想，那样推，无法在脑海形成一个形象来. 设想出了几个结构，算来算去，都与事实不符，找不出这样的角度来. 这还不只是数学问题，而必须请教一下实物，看

看蜂房到底是怎样的几何形状，所谓的角到底是指的什么角！

§3 访　实

解除困恼的最简单的办法是撤退．是的，我们有一千个理由可以撤退，象这是已经解决了的问题呀！这不是属于我们研究的范围内的问题呀！这还不是确切的数学问题呀！这些理由中只要有一个抬头，我们就将失去了一个锻炼的机会．一千个理由顶不上一个理由，就是不会！不会就得想，就得想到水落石出来．空间的几何图形既然还属茫然，当然就必须请教实物．感谢昆虫学家刘崇乐教授，他给了我一个蜂房，使我摆脱了困境．

画一支铅笔怎样画？是否把它画成为如图 2 那样？



图 2

有人说这不象，我说很象．我是从近处正对着铅笔头画的．这是写实，但是并不足以刻划出铅笔的形态来．我们的图 1（和§1 的说明）就是用“正对铅笔头的方法”画出来的，当然没有了立体感，更无法显示出蜂房内部的构造情况．

看到了实物，才知道既说“六角”又说“菱形”的意义．原来是，正面看来，蜂房是由一些正六边形所组成的．既然是正六边形，那就每一角都是 120°，并没有什么角度的问题．

问题在于房底．蜂房并非六棱柱，它的底部都是由三个菱形所拼成的．图 3 是蜂房的立体图．这个图比较清楚些，但还是得用各种分图及说明来解释清楚．说得更具体些，拿一支六棱柱的铅笔，未削之前，铅笔一端的形状是正六角形 $ABCDEF$（图 4）．通过 AC，一刀切下一角，把三角形 ABC 搬置 $AP'C$ 处；过 AE，CE 切如此同样三刀，所堆成的形状就如图 5 那样，而蜂巢就是由两排这样的蜂房底部和底部相接而成的．

因而初步形成了以下的数学问题了：

怎样切出来使所拼成的三个菱形做底的六面柱的表面积最小？

为什么说是"初步"？且待 § 6、§ 7 中分解．下节中首先解决这个简单问题．

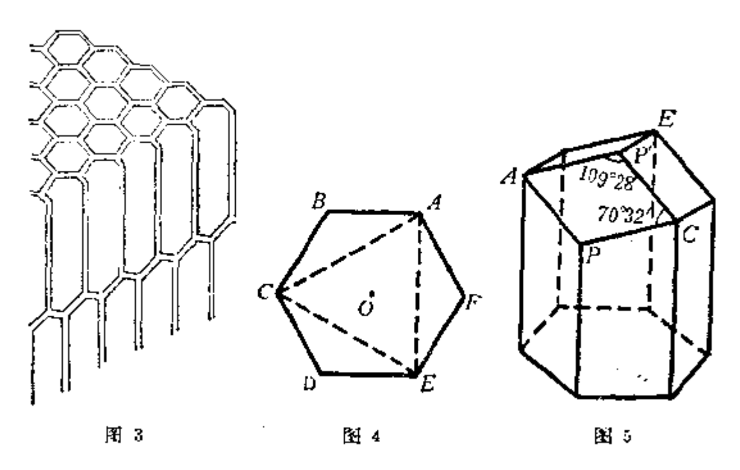


图 3　　图 4　　图 5

（读者试利用这机会来考验一下自己对几何图形的空间

想象能力．这样的图形可以排成密切无间的蜂窝．）

§4 解 题

假定六棱柱的边长是1，先求 AC 的长度．ABC 是腰长为1，夹角为120°的等腰三角形．以 AC 为对称轴作一个三角形 $AB'C$（图6）．三角形 ABB' 是等边三角形．因此，

$$\frac{1}{2}AC=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

即得 $AC=\sqrt{3}$．

把图5的表面分成六份，把其中之一摊平下来，得出图7的形状．从一个宽为1的长方形切去一角，切割处成边

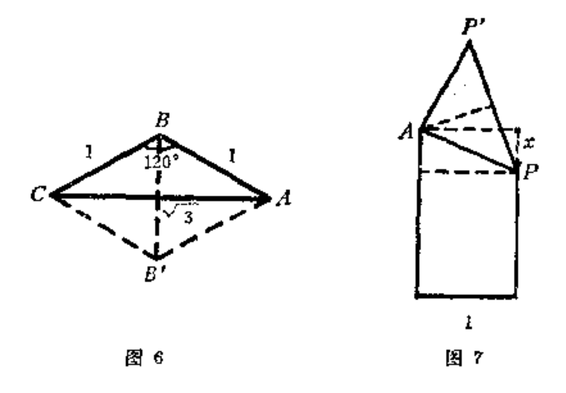


图6　　图7

AP．以 AP 为腰，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为高作等腰三角形．问题：怎样切才

能使所作出的图形的面积最小？

假定被切去的三角形的高是 x. 从矩形中所切去的面积等于$\frac{1}{2}x$. 现在看所添上的三角形 APP' 的面积. AP 的长度是$\sqrt{1+x^2}$, 因此 PP'的长度等于

$$2\sqrt{(1+x^2)-\frac{3}{4}}=\sqrt{1+4x^2},$$

因而三角形 APP'的面积等于

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}.$$

问题再变而为求

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$$

的最小值的问题.

念过微积分的读者立刻可以用以下的方法求解：（没有学过微积分的读者可以略去以下这一段.）

求

$$f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$$

的微商，得

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{1+4x^2}}.$$

由 $f'(x)=0$, 解得 $1+4x^2=12x^2$, $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$. 又

$$f''(x)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+4x^2}}-\frac{4\sqrt{3}\,x^2}{(1+4x^2)^{3/2}}=\frac{\sqrt{3}}{(1+4x^2)^{3/2}}>0,$$

因而当 $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$ 时给出极小值

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

这一节说明了当 $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$ 时取最小值，即在一棱上过 $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$ 处(图 5 中 P 点)以及与该棱相邻的二棱的端点(图5中 A, C 点)切下来拼上去的图形的表面积最小.

用 γ 表示三角形 APP' 两腰的夹角 $\angle PAP'$. γ 的余弦由以下的余弦公式给出：

$$2(1+x^2)\cos\gamma=2(1+x^2)-(1+4x^2)=1-2x^2,$$

即
$$\cos\gamma=\frac{1-2x^2}{2(1+x^2)}=\frac{3}{8}\Big/\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{3}.$$

因此得出 $\gamma=70°32'$.

把问题说得更一般些，以边长为 a 的正六边形为底，以 b 为高的六棱柱，其六个顶点顺次以 $ABCDEF$ 标出(图 8). 过 B (或 D 或 F) 棱距顶点为 $\frac{1}{\sqrt{8}}a$ 处及 A, C(或 C, E 或 E, A) 作一平面；切下三个四面体，反过来堆在顶上，得一以三个菱形做底的六棱尖顶柱. 现在算出这六棱尖顶柱的体积和表面积：

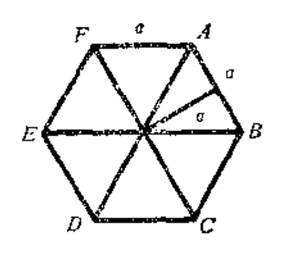


图 8

体积等于以边长为 a 的正六角形的面积乘高 b，即

$$6\times\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

乘以 b，即得

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b.$$

表面积等于六棱柱的侧面积 $6ab$ 加上六倍的 $\frac{1}{\sqrt{8}}a^2$ $\left[\text{也就是 } f\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)a^2=\frac{1}{\sqrt{8}}a^2\right]$，即

$$6ab+\frac{6}{\sqrt{8}}a^2=6a\left(b+\frac{a}{\sqrt{8}}\right).$$

§5 浅　　化

没有读过微积分的读者不要着急．在我解决了这问题之后，当然就想到了要不要用微积分，能不能找到一个中学生所能理解的解法．有的，而且很不少．

方法一　我们需要用以下的结果（或称为算术中项大于几何中项）．当 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$ 时，常有

$$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}, \tag{1}$$

当 $a=b$ 时取等号，当 $a\neq b$ 时取不等号．这一结论可由不等式

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0 \tag{2}$$

立刻推出．

现在试来解决问题．命 $2x=t-\frac{1}{4t}(t>0)$，则

$$f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{4t}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(t+\frac{1}{4t}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{4}t+\frac{\sqrt{3}+1}{4}\times\frac{1}{4t}.$$

由(1) 得出

$$f(x)\geqslant 2\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{4^3}}=\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

并且知道仅当

$$\frac{\sqrt{3}-1}{4}t=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\times\frac{1}{4t}$$

时取等号．即，当

$$4t^2=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2},\quad t=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

而当 $$x=\frac{1}{2}\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{3})}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{8}}$$

时，$f(x)$取最小值$\frac{1}{\sqrt{8}}$.

方法二 在式子

$$[\lambda(\sqrt{1+4x^2}+2x)^{\frac{1}{2}}-\mu(\sqrt{1+4x^2}-2x)^{\frac{1}{2}}]^2$$

$$=2(\lambda^2-\mu^2)x+(\lambda^2+\mu^2)\sqrt{1+4x^2}-2\lambda\mu\geqslant 0$$

中，取 $2(\lambda^2-\mu^2)=-\frac{1}{2}$， $\lambda^2+\mu^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$，即得

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}\geqslant 2\lambda\mu=\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)^2-(\lambda^2-\mu^2)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{4^2}-\frac{1}{4^2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

并且仅当$\lambda^2(\sqrt{1+4x^2}+2x)=\mu^2(\sqrt{1+4x^2}-2x)$时取等号，即

$$(\lambda^2-\mu^2)\sqrt{1+4x^2}+2(\lambda^2+\mu^2)x$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{1+4x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x=0$$

时取等号. 解得 $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$.

方法三 命 $2x=\mathrm{tg}\theta$，则

$$f(x)=\frac{-\frac{1}{4}\sin\theta+\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\cos\theta}=\alpha\times\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\beta\times\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\geqslant 2\sqrt{\alpha\beta\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=2\sqrt{\alpha\beta},$$

这儿 $\alpha+\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$-\alpha+\beta=-\frac{1}{4}$，不难由此解得答案.

方法虽是三个，实质仅有一条，转来转去仍然是依据了 $a^2+b^2-2ab=(b-a)^2\geqslant 0$.

南京师范学院附中的老师和同学们又提供了以下的四个证明(方法四至方法七).

方法四 令 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$,

故 $$y+\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2},$$

两边平方并加以整理得

$$x^2-2yx+\frac{3}{8}-2y^2=0. \qquad (3)$$

因为 x 为实数，故二次方程(3)的判别式

$$\Delta=y^2-\frac{3}{8}+2y^2=3y^2-\frac{3}{8}\geqslant 0,$$

而 y 必大于 0，因此 y 的最小值是 $\frac{1}{\sqrt{8}}$. 以此代入(3)，则 $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$.

方法五 设$\sqrt{1+4x^2}=2x+t$，$(t>0)$

由此得
$$x=\frac{1-t^2}{4t},$$

因此
$$\sqrt{1+4x^2}=\frac{1-t^2}{2t}+t=\frac{1+t^2}{2t}.$$

故
$$f(x)=\frac{t^2-1}{8t}+\frac{\sqrt{3}(t^2+1)}{8t}$$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{(\sqrt{3}+1)t^2+(\sqrt{3}-1)}{t}$$

$$=\frac{1}{8}\left[(\sqrt{3}+1)t+(\sqrt{3}-1)\frac{1}{t}\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{8}\times2\sqrt{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

由此不难解出问题.

方法六 设$2x=\mathrm{tg}\theta$.

则
$$y=f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\sec\theta-\frac{1}{4}\mathrm{tg}\theta,$$

即
$$4y\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{3},$$

$$\sqrt{1+(4y)^2}\sin(\theta+\varphi)=\sqrt{3},$$

这儿φ由$\mathrm{tg}\varphi=4y$决定. 因此,

$$\sin(\theta+\varphi)=\sqrt{\frac{3}{1+16y^2}}\leqslant1,$$

即
$$1+16y^2\geqslant3,$$

故 y 的最小值为$\frac{1}{\sqrt{8}}$. 这时 $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$，$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\sin(\theta+\varphi)=1$.因此

$$\theta+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}. \qquad (k=0,1,\cdots)$$

于是 $\operatorname{tg}\theta=\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $x=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{\sqrt{8}}$.

方法七

首先证明，当 $b\geqslant1$，$x\geqslant0$ 时下列不等式成立：

$$\sqrt{b(1+x)}-\sqrt{x}\geqslant\sqrt{b-1}; \tag{4}$$

且仅当 $x=\frac{1}{b-1}$时等号成立.

证：$[(b-1)x-1]^2=(b-1)^2x^2-2(b-1)x+1\geqslant0$.

故 $$(b+1)^2x^2+2(b+1)x+1\geqslant4bx(1+x)>0,$$

$$(b+1)x+1\geqslant2\sqrt{b(x+1)}\times\sqrt{x},$$

$$b(x+1)-2\sqrt{b(x+1)}\times\sqrt{x}+x\geqslant b-1,$$

即 $$(\sqrt{b(x+1)}-\sqrt{x})^2\geqslant b-1>0.$$

则 $$\sqrt{b(x+1)}-\sqrt{x}\geqslant\sqrt{b-1}.$$

这样，不等式(4)得证. 由此，

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$$

$$=\frac{1}{4}[\sqrt{3(1+4x^2)}-\sqrt{4x^2}]\geqslant\frac{1}{4}\times\sqrt{2},$$

仅当 $4x^2=\frac{1}{2}$时(此时 $b=3$) 等号成立，即得问题之解.

方法八 (北京师范大学附属实验中学某高一同学的解法)

由 $$y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2},$$

清理方根号得出 $$y^2+xy=\frac{3}{16}+\frac{1}{2}x^2,$$

即 $$y^2-\frac{1}{8}=\frac{1}{3}(x-y)^2.$$

可知当 $x=y=\frac{1}{\sqrt{8}}$时，y 取最小值.

读者试分析这些证法的原则性的共同点或不同点(例如：配方).

§6 慎　　微

我们必须小心在意，不要以为前所提出的几何问题和我们上两节所讨论的代数问题是完全等价的了. 在几何问题中，切割处不能超过六棱柱的高度，也就是高度 b 必须$\geqslant\frac{1}{\sqrt{8}}a$ 才有意义. 如果 $b<\frac{1}{\sqrt{8}}a$, 应当怎样切才对？

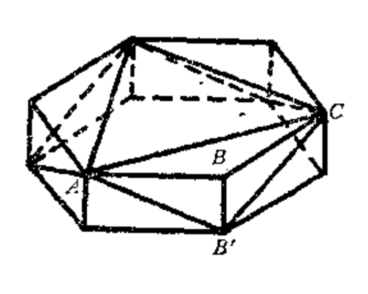


图 9

是否就是通过上底的 AC 及下底的 B'所切出的方法，共切三刀所得出的图形（图 9）？

§7 切　　方

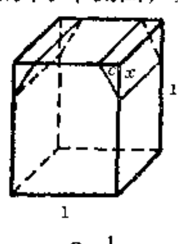
从以上的问题立刻可以联想到，以六棱柱为基础，还有没有其它的切拼方法？例如，不是尖顶六棱柱，而是屋脊六棱柱行不行？由四方柱出发行不行？用四方柱怎样切下接上最好？读者不妨多方设想．我现在举以下二例：

1．从边长为 1 的正四方柱的$\frac{1}{4}$处切下一个三角柱堆到顶上，对边也如此切，也如此堆上去（图 10，参看图 14），堆好之后得一方柱上加一屋脊的形状．求切在何处，表面积最小？

假定在棱上距顶点 x 处切。一刀使侧面少去一个矩形，面积是 x（并且同时还少掉两个三角形，但是把切下来的三角柱搬置顶上以后，此两个三角形仍为柱体的侧面，因此实际上并没有少），添上三角柱翻开后暴露出的两个侧面，其总面积是 $2\sqrt{x^2+\frac{1}{4^2}}$．因此，问题成为求

$$-x+2\sqrt{x^2+\frac{1}{4^2}}$$

的最小值．



$C=\frac{1}{4}$

图 10

不难求出，当 $x=\frac{1}{4\sqrt{3}}$时，此面积

取最小值

$$-\frac{1}{4\sqrt{3}}+2\sqrt{\frac{1}{4^2\times 3}+\frac{1}{4^2}}=-\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2．如果把“切边”改为“切角”，即过两边中点及棱上距顶点为 x 处切下四面体堆上去的情况(图 11)。

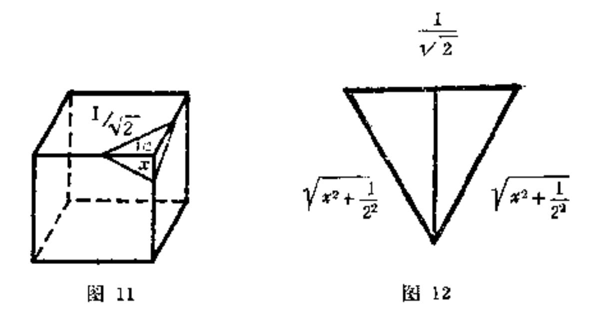


图 11　　　　图 12

一刀切去侧面两个三角形，其总面积为 $2\times\frac{1}{2}x\times\frac{1}{2}=\frac{x}{2}$；添上两个边长为

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{2^2}},\ \sqrt{x^2+\frac{1}{2^2}},\ \sqrt{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}$$

的三角形(图 12)，其总面积是

$$2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{x^2+\frac{1}{2^2}-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{x^2+\frac{1}{8}}.$$

问题成为求　$$-\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{x^2+\frac{1}{8}}$$

的最小值。

不难求出当 $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$时，即得最小值$\frac{1}{2\sqrt{8}}$.

两种切法相比，前一法添上二块大小是$\frac{\sqrt{3}}{4}$的面积，后一法添上四块大小是$\frac{1}{2\sqrt{8}}$的面积．由于

$$4\times\frac{1}{2\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以第二种切法更好些．

把第一种切法讲得更一般些：四方柱的底是边长为 a 的正方形，高是 b．从四方形边的$\frac{1}{4}a$ 处及棱上$\frac{1}{4\sqrt{3}}a$ 处切下一个三角柱，堆到顶上．则所得屋脊四方柱的体积仍为a^2b，而表面积(不算底面)为

$$4ab+2\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=4a\left(b+\frac{\sqrt{3}}{8}a\right).$$

第二种切法的一般情况则是：四方柱的底是边长为 a 的正方形，高为 b．从四方形两邻边的中点及棱上$\frac{1}{\sqrt{8}}a$ 处切下四个四面体，堆到顶上形成一个尖顶四方柱，其体积仍是a^2b, 而表面积(不算底面)是 $4ab+\frac{1}{\sqrt{2}}a^2$.

§8 疑　古

以上虽然讲了不少，我们还没有回答出“同样的体积，哪一种模型需要建筑材料最少”的问题．在处理这问题之前，先证明以下的不等式．

如果 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$，则

$$\frac{1}{3}(a+b+c)\geqslant(abc)^{\frac{1}{3}}, \qquad (1)$$

且仅当 $a=b=c$ 时取等号．

其证明可由以下的恒等式推出：

$$a+b+c-3(abc)^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})\left[a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}-(ab)^{\frac{1}{3}}-(bc)^{\frac{1}{3}}-(ca)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})\left[(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^2+(b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}})^2+(c^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}})^2\right].$$

定理 1. 体积为 V 的尖顶六棱柱的表面积（不算底面）的最小值是 $3\sqrt{2}V^{\frac{2}{3}}$，而且仅当六角形边长是 $\sqrt{\frac{2}{3}}V^{\frac{1}{3}}$，高度是 $\frac{1}{2}\sqrt{3}V^{\frac{1}{3}}$ 时取这最小值(图 13)．

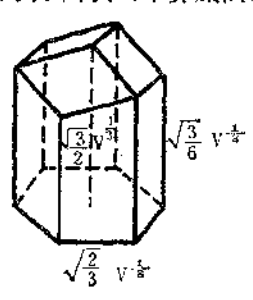


图 13

证： 由 §4 已知尖顶六棱柱的体积 V 和表面积 S 各为

$$V=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b,$$

$$S=6a\left(b+\frac{a}{\sqrt{8}}\right),$$

即
$$S=\frac{4V}{\sqrt{3}a}+\frac{6}{\sqrt{8}}a^2$$

$$=\frac{2V}{\sqrt{3}a}+\frac{2V}{\sqrt{3}a}+\frac{6}{\sqrt{8}}a^2.$$

由公式(1)得出

$$S\geqslant3\left(\frac{2V}{\sqrt{3}a}\times\frac{2V}{\sqrt{3}a}\times\frac{6}{\sqrt{8}}a^2\right)^{\frac{1}{3}}=3\sqrt{2}V^{\frac{2}{3}};$$

而且仅当

$$\frac{2V}{\sqrt{3}a}=\frac{6}{\sqrt{8}}a^2,$$

也就是

$$a=\sqrt{\frac{2}{3}}V^{\frac{1}{3}},\quad b=\frac{1}{\sqrt{3}}V^{\frac{1}{3}}$$

时 S 取最小值. 但必须检验这是否适合于条件

$$b\geqslant\frac{1}{\sqrt{8}}a;$$

如果不适合，可能出现 § 6 所指出的情况，而这个数值是不能达到的.

这尖顶六棱柱的高度是 $b+\frac{1}{\sqrt{8}}a=\frac{1}{2}\sqrt{3}V^{\frac{1}{3}}$，它的棱长高的是 $b=\frac{1}{\sqrt{3}}V^{\frac{1}{3}}$，低的是 $b-\frac{1}{\sqrt{8}}a=\frac{1}{6}\sqrt{3}V^{\frac{1}{3}}$.

定理 2. 体积为V的屋脊四方柱的表面积(不算底面)的最小值是$V^{\frac{2}{3}}$,而且仅当正方形边长是$\frac{2^{2/3}}{3^{1/6}}V^{\frac{1}{3}}$及檐高$\frac{1}{2^{1/3}3^{2/3}}V^{\frac{1}{3}}$的情况下取这最小值

$2^{-\frac{1}{3}}3^{-\frac{2}{3}}V^{\frac{1}{3}}$

$2^{\frac{2}{3}}3^{-\frac{1}{6}}V^{\frac{1}{3}}$

图 14

证：由§7已知屋脊四方柱的体积V和表面积S各等于

$$V=a^2b,$$

$$S=4a\left(b+\frac{\sqrt{3}}{8}a\right),$$

即
$$S=\frac{4V}{a}+\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$=\frac{2V}{a}+\frac{2V}{a}+\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

由公式(1)得出

$$S\geqslant 3\left(\frac{2V}{a}\times\frac{2V}{a}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{7}{6}}V^{\frac{2}{3}},$$

而且仅当

$$\frac{2V}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2,$$

也就是

$$a=\frac{2^{2/3}}{3^{1/6}}V^{\frac{1}{3}},\quad b=\frac{3^{1/3}}{2^{4/3}}V^{\frac{1}{3}}$$

时S取最小值. 易见 $b>\frac{a}{4\sqrt{3}}$. 因此檐高等于

$$b-\frac{1}{4\sqrt{3}}a=\left(\frac{3^{1/3}}{2^{4/3}}-\frac{1}{2^{4/3}3^{2/3}}\right)V^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{2^{1/3}3^{2/3}}V^{\frac{1}{3}};$$

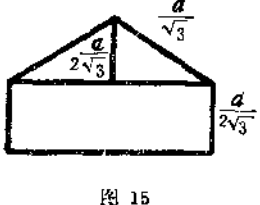


图 15

脊高为 $b+\frac{1}{4\sqrt{3}}a=\frac{2^{2/3}}{3^{2/3}}V^{\frac{1}{3}}$.

截面如图 15，即六角形的一半.

结论：由于

$$3\sqrt{2}<3^{\frac{7}{6}}2^{\frac{1}{3}},$$

所以在保证同样容量的条件下，尖顶六棱柱比屋脊四方柱用材要少.

用同样方法不难证明，体积为V的尖顶四方柱的表面积(不算底面)的最小值是$3\sqrt{2}V^{\frac{2}{3}}$，而且仅当正方形边长为$\sqrt{2}V^{\frac{1}{3}}$及檐高为“0”的情况下取这最小值. 说得更清楚些，这是个以$\sqrt{2}V^{\frac{1}{3}}$为底边长，以$\left(2\times\frac{1}{\sqrt{8}}\times\sqrt{2}V^{\frac{1}{3}}=\right)V^{\frac{1}{3}}$为高的尖顶形，或即将菱形十二面体拦腰一截，所得之半. 因此在同样容量下，这种容器和尖顶六棱柱用材相同.

虽然如此，但实际测量一下，蜂房的大小与定理 1 中所给出的比例并不相合. 经过实测，$a\doteq0.35$ 厘米，深 $b+\frac{1}{\sqrt{8}}a\doteq0.70$ 厘米，而按定理 1，$b+\frac{1}{\sqrt{8}}a=\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{8}}a=\frac{3}{\sqrt{8}}\times0.35\doteq0.38$ 厘米.

正是：往事几百年，祖述前贤，瑕疵讹谬犹盈篇，蜂房秘奥未全揭，待我向前！

让我们再看看，添上一扇以底面作的"门"，问哪种形状最好？

先看屋脊四方柱，它是在体积为

$$V=a^2b$$

的情况下求表面积(包括"门"在内)

$$S=4a\left(b+\frac{\sqrt{3}}{8}a\right)+a^2$$

的最小值．由

$$S=\frac{4V}{a}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)a^2$$

$$\geqslant 3\left[\frac{2V}{a}\times\frac{2V}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)a^2\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=3[2(\sqrt{3}+2)]^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}},$$

并且仅当

$$\frac{2V}{a}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)a^2$$

时取等号，即

$$a=\left[\frac{4}{\sqrt{3}+2}\right]^{\frac{1}{3}}V^{\frac{1}{3}}=[4(2-\sqrt{3})]^{\frac{1}{3}}V^{\frac{1}{3}}$$

时取等号．其时

$$b=\frac{1}{[4(2-\sqrt{3})]^{2/3}}V^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^{\frac{2}{3}}V^{\frac{1}{3}}.$$

再看尖顶六棱柱．它是在体积

$$V=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$$

的情况下求表面积(包括"门"在内)

$$S=6a\left(b+\frac{a}{\sqrt{8}}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

的最小值．由

$$S=2\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{V}{a}+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a^2$$

$$\geqslant3\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{V}{a}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{V}{a}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a^2\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=3[2(\sqrt{2}+\sqrt{3})]^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}},$$

且仅当

$$\frac{2V}{\sqrt{3}a}=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a^2,$$

即

$$a=\frac{4^{1/3}}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}V^{\frac{1}{3}},$$

$$b=\frac{2}{3\sqrt{3}}\times\frac{3}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2/3}}\times\frac{1}{2^{4/3}}V^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{2^{1/3}\times\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2/3}}V^{\frac{1}{3}}$$

时取等号．

两下相比，由于

$$3[2(\sqrt{3}+2)]^{\frac{1}{3}}>3[2(\sqrt{3}+\sqrt{2})]^{\frac{1}{3}},$$

所以还是尖顶六棱柱来得好.

对于尖顶四方柱而言，可以算出表面积(包括“门”在内)的最小值为$3[2(2+\sqrt{2})]^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}}$,也没有尖顶六棱柱来得好.

对于尖顶六棱柱，

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\doteq 0.64,$$

与实测所得的$\frac{a}{b}\doteq\frac{0.35}{0.58}\doteq 0.6$相比相当接近. 有没有道理?

§9 正　　题

由上可知，客观情况并不单纯是一个“体积给定，求用材最小”的数学问题，那样的提法是不妥当的. 现在让我们来重提看看.

把蜜蜂的体态入算. 从考虑它的身长、腰围入手，怎样情况用材最省?

首先，那尖顶六棱柱所能容纳的“腰围”等于$\sqrt{3}a$（图16)，长度是$b+\frac{1}{\sqrt{8}}a$. 另一方面屋脊四方柱的“腰围”等于a_1, 长度等于$b_1+\frac{1}{4\sqrt{3}}a_1$. 让我们在粗长各相等，即在

$$\sqrt{3}a=a_1,$$

$$b+\frac{1}{\sqrt{8}}a=b_1+\frac{1}{4\sqrt{3}}a_1$$

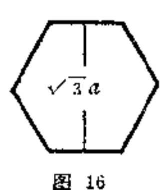


图 16

的条件下考虑问题. 由于

$$S_1=4a_1\left(b_1+\frac{\sqrt{3}}{8}a_1\right)$$

$$=4a_1\left[\left(b_1+\frac{1}{4\sqrt{3}}a_1\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)a_1\right]$$

$$>4a_1\left(b_1+\frac{1}{4\sqrt{3}}a_1\right)=4\sqrt{3}a\left(b+\frac{1}{\sqrt{8}}a\right)$$

$$>6a\left(b+\frac{1}{\sqrt{8}}a\right)=S,$$

即在同长同粗的情况下，尖顶六棱柱比屋脊四方柱省料些.

这建议了以下的猜测：

量体裁衣，形状为尖顶六棱柱的蜂房，是最省材料的结构，它比屋脊四方柱还要节省材料.

再看带"门"的情况. 仍然

$$\sqrt{3}a=a_1,\qquad b+\frac{1}{\sqrt{8}}a=b_1+\frac{1}{4\sqrt{3}}a_1.$$

但需要比较

$$S_1=4a_1\left(b_1+\frac{\sqrt{3}}{8}a_1\right)+a_1^2$$

与 $$S=6a\left(b+\frac{1}{\sqrt{8}}a\right)+\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=6ab+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a^2$$

谁大. 以 $a_1=\sqrt{3}a$, $b_1=b+\frac{1}{\sqrt{8}}a-\frac{1}{4}a$ 代入 S_1，得

$$S_1=4\sqrt{3}a\left(b+\frac{1}{\sqrt{8}}a-\frac{1}{4}a+\frac{3}{8}a\right)+3a^2$$

$$=4\sqrt{3}ab+\left(\sqrt{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}+3\right)a^2$$

$$>6ab+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a^2=S.$$

也就是说，带上门，还是蜂窝来得好.

这说明了生物本身与环境的关系的统一性.

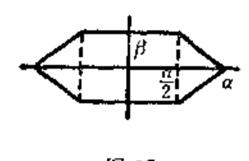


图 17

附记：读者不难证明，如果我们考虑 x, y 轴刻度不一致的正六边形（图 17），考虑由此所作出的六棱柱和尖顶六棱柱，我们不难证明，在体积给定的条件下，仍然以 §8 中所得出的图形表面积最小.

学过微积分的读者可以看出，我实在是在“分散难点”. 确切地说，这是一个四个变数求条件极值的问题. 四个变数是指 x, y, z 轴各增加若干倍，并在某点切下来；条件是等体积.

§ 10 设　问

从以上所谈的一些情况看来，我们只不过从六棱柱（或四方柱）出发，按一定的切拼方法做了些研究而已．实质上，这样的看法未入事物之本质．为什么仅从六棱柱出发，而不能从三角柱、四方柱或其它柱形出发，甚至于为什么要从柱形出发？更不要说切拼之法也是千变万化了！甚至于为什么要从切拼得来！越想问题越多，思路越宽．

把两个蜂房门对门地联接起来，得出以下两种可能的图形(图 18、19)．



图 18

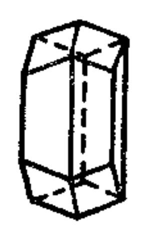


图 19

这两图形都有以下的性质：用这种形式的砖可以填满整个空间．有这样性质的砖，就是结晶体．图 16 所表达的其实就是透视石的晶体．

两个屋脊四棱柱口对口地接在一起，两个尖顶四棱柱口对口地接在一起，各得黄赤沸石（图 20）与锆英石(图 21)的晶体图形．特别，两个尖顶形口对口地接在一起得一菱形十二面体，也就是石榴子石晶体的图形(图 22)．

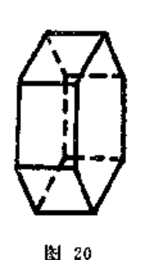


图 20

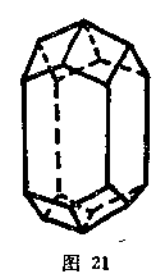


图 21



图 22

因而归纳出以下的基本问题：

问题 1．怎样的体可以作为晶体？也就是说，用同样的体可以无穷无尽地，无空无隙地填满整个空间．

这是有名的晶体问题．经过费德洛夫的研究知道，晶体可分为 230 类．

问题 2．给定体积，哪一类晶体的表面积最小？

问题 3．给一个一定的体形，求出能包有这体形的表面积最小的晶体．例如，图 23 给了一个橄榄或一个陀螺，求包这橄榄或陀螺的表面积最小的晶体．把那晶体拦腰切为两段，那可能是蜂房的最佳结构了．

为了补充些感性知识，我们再讲些例子．

柱体填满空间的问题等价于怎样的样板可以填满平面的问题．以任何一个三角形为样板都可以填满平面（图 24）．任何四边形也可以作为样板用来填满平面（图 25）．一个正六边形（或六个角都是 120° 的图形），也可以用来作为样板填满平面（图 26）．

在这三个图形中可以看出什么公共性质？例如图 24 的各边中点形成怎样的网格；在图 26 中联上六边形的三条“对

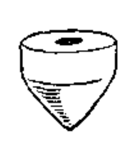



图 23

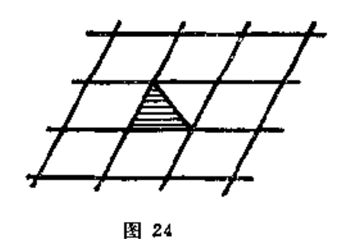


图 24

角线"得出怎样的图形？

为什么要求的只是填上整个空间或平面，而不是一个球或一个圆柱？

现在让我们以球为例来作一些探讨。

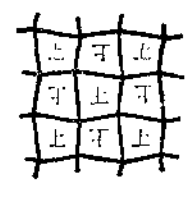


图 25

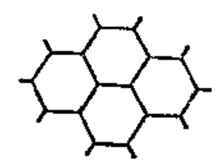


图 26

例 1. 把球分为二十四等分．以球心为原点，引三条坐标轴，将球分为八等份（八个卦限，每个卦限一份）如图27；再从每片球面的中心向三顶点如图划分，共得 24 份．

例 2. 把球分为六十等分．从球内接正二十面体（图 28）出发，向球上投影得 20 个三角形；再把每一个三角形依中心到三角的联线分为三等分，因而共得 60 份．

例 3. 把柱形直切成四等分；再切成片，每一个成一间

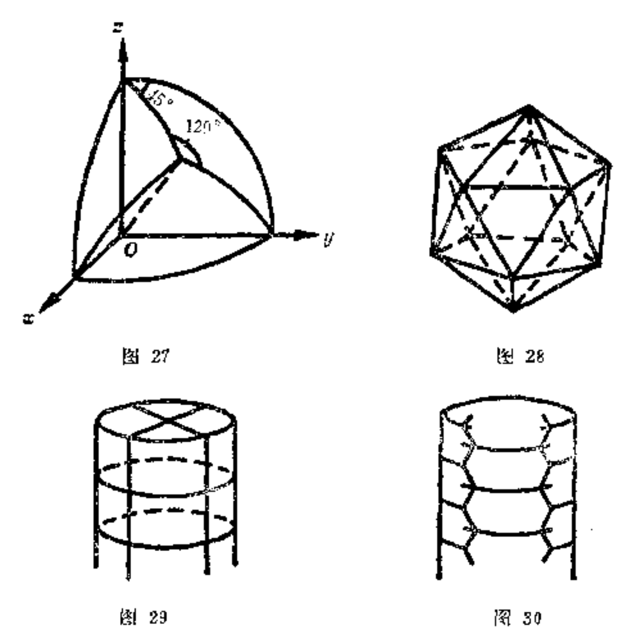


图 27　　图 28

图 29　　图 30

房（图 29）。另一方法，作柱上开口象六角形的图形拼上（图 30）。

（感谢许杰教授，他给我看到了古生物笔石的模型，启发出这一图象.）

由蜂房启发出来的问题，所联想到的问题何止于此！浮想联翩，由此及彼，花样真不少呢！据说飞机的蜂窝结构也是由此而启发出来的，但可以根据不同的要求，而得出各种各样的求极值问题来(例如，使结构的强度达到最高的问题)．就数学来说，由此可以想到的问题真也不少．本文是为高中

水平的读者写的，因而不能不适可而止了。但是为了让同学们在进入大学之后还可以咀嚼一番，回味一番，我在此后再添讲几节。一来看看怎样“浮想”；二来给同学提供一个例子：怎样从一个问题而复习我们所学到的东西，这样复习就使有些学过的内容自然而然地串联起来了。

§11 代　　数

在阅读§12，§13 等内容以前，我们先来一段插话。这段插话可以不看。也许看了一下会觉得有些联系不上，但将来回顾一下，读者会有深长体会的！

经过旋转，平移，透视石（两个蜂房对合所成的图形）的表面积和体积不变。在§9 中曾经提出过把 x, y, z 轴各增长若干倍而看一个透视石体积及表面积的变化的情况。如果体积不变，怎样的倍数才能使表面积取最小值？这实质上是求：在群

$$x'=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z+\delta_1,\ y'=\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z+\delta_2,$$

$$z'=\alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z+\delta_3,$$

$$\left(\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=1\right)$$

下，等价于一个透视石的诸图形中，哪一个表面积最小。

看来，对平行六面体的讨论可能容易些。用无数个同样的平行六面体可以填满空间。如果六面体的体积给了，怎样的形状表面积最小（或棱的总长最短，或棱的长度的乘积最

小）；

讲到这儿，暂且摆下，慢慢咀嚼，慢慢体会这一段话与以下所讲的东西的关系．我们先看一批代数不等式．

例 1．求证

$$2\sqrt{|ad-bc|}\leqslant\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2},\tag{1}$$

而且仅当$\frac{a}{b}=-\frac{d}{c}$及$|b|=|c|$或$|a|=|b|$时取等号．

证：由

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2)&=(ad-bc)^2+(ac+bd)^2\\&\geqslant(ad-bc)^2,\end{aligned}$$

因此

$$|ad-bc|\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)},\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{|ad-bc|}&\leqslant\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\right),\end{aligned}$$

即得所证．

例 2．求证

$$\begin{aligned}6\sqrt{|ad-bc|}&\leqslant2\sqrt{a^2+c^2}\\&+\sqrt{a^2+c^2+3(b^2+d^2)-2\sqrt{3}(ab+cd)}\\&+\sqrt{a^2+c^2+3(b^2+d^2)+2\sqrt{3}(ab+cd)}.\end{aligned}\tag{3}$$

读者试自己证明此式，并且试证以下两不等式．最好等证毕后再看§13．

例 3．求证

$$\begin{aligned}16|ad-bc|^3\leqslant(a^2+c^2)\{&[a^2+c^2+3(b^2+d^2)]^2\\&-12(ab+cd)^2\}.\end{aligned}\tag{4}$$

更一般些，有

例 4. 当 $n\geqslant 1$ 时，

$$|ad-bc|^{n}\leqslant\prod_{l=1}^{n}\Big[(a^{2}+c^{2})\sin^{2}\frac{\pi(2l-1)}{n}$$

$$-2(ab+cd)\sin\frac{\pi(2l-1)}{n}\cos\frac{\pi(2l-1)}{n}$$

$$+(b^{2}+d^{2})\cos^{2}\frac{\pi(2l-1)}{n}\Big], \tag{5}$$

或

$$|ad-bc|^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\Big[(a^{2}+c^{2})\sin^{2}\frac{\pi(2l-1)}{n}$$

$$-2(ab+cd)\sin\frac{\pi(2l-1)}{n}\cos\frac{\pi(2l-1)}{n}$$

$$+(b^{2}+d^{2})\cos^{2}\frac{\pi(2l-1)}{n}\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

(5) 式比 (6) 式难些，我们将在 §14 中给以证明。

§ 12　几　　何

看看上节(1) 式及(2) 式的几何意义如何？在平面上作三点 $O(0,0)$，$A(a,b)$及 $B(c,d)$. 以 OA, OB 为边的平行四边形的面积等于 $|ad-bc|$, OA, OB 的长度各为$\sqrt{a^{2}+b^{2}}$，$\sqrt{c^{2}+d^{2}}$. 所以上节不等式 (2) 的意义是平行四边形的面积小于或等于两邻边的乘积。

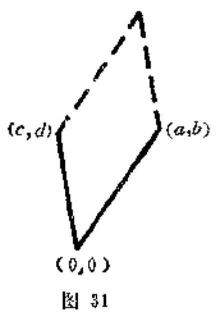


图 31

而不等式 (1) 的意义是：平行四边形面积的平方根小于或等于其周长的四分之一，即四边长的平均值，并且仅当正方形时取等号；或者说 (1) 的意义也就是周长一定的平行四边形中，以正方形的面积为最大。

再看不等式 (3)，从代数的角度来看有些茫然，有些突然. 但从几何来看却是"周长一定的六边形中，以正六角形的面积为最大"的这一性质的特例. 不等式(6)也可以作如是观.

这些结果的几何意义是明显的. 但如果抛开几何，就式论式，从代数角度来看就有些意外了. 实质岂其然哉，谬以千里！那不过是几何的性质用代数的语言说出而已.

这是"几何"启发出"代数"，但代数的考虑又大大地丰富了几何. 由于几何平均小于算术平均，因此，由 (6) 式可以追问更精密的 (5) 式对不对. 要从几何角度直接看出 (5) 式来是不太容易的.

不要说不等式 (2) 简单，推广到 n 维空间就有

$$\begin{vmatrix} a_{11}, \cdots, a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, \cdots, a_{nn} \end{vmatrix} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{1i}^2 \sum_{i=1}^{n} a_{2i}^2 \cdots \sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2.$$

这是有名的 Hadamard 不等式. 但其几何直观已尽乎此点，对有丰富几何直观的人来说此式之发明并非出人意料了. 正是：

数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞。数缺形时少直觉，形少数时难入微。数形结合百般好，隔裂分家万事非。切莫忘，几何代数统一体，永远联系，切莫分离！

§ 13 推　　广

我们现在来证明 § 12 公式（5）. 在证明之前，我们换一下符号. 命

$$A=a^2+c^2,\quad B=-ab-cd,\quad C=b^2+d^2,$$

因此

$$(ad-bc)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2=AC-B^2.$$

§ 12 的公式(5)一变而为求证：如果 $A>0$，$AC-B^2>0$，则

$$(AC-B^2)^{\frac{n}{2}}\leqslant\prod_{l=1}^{n}\Big[A\sin^2\frac{\pi(2l-1)}{n}$$

$$+2B\sin\frac{\pi(2l-1)}{n}\cos\frac{\pi(2l-1)}{n}+C\cos^2\frac{\pi(2l-1)}{n}\Big].\tag{1}$$

这式子的右边用 P 表之，用倍角公式得

$$P=\prod_{l=1}^{n}\Big[\frac{1}{2}(A+C)+B\sin\frac{2\pi(2l-1)}{n}$$

$$+\frac{1}{2}(C-A)\cos\frac{2\pi(2l-1)}{n}\Big]$$

$$=\prod_{l=1}^{n}\Big[p-q\cos\Big(\frac{2\pi(2l-1)}{n}+\eta\Big)\Big],$$

这儿

$$p=\frac{1}{2}(A+C),\ \ q=\sqrt{B^2+\frac{1}{4}(C-A)^2}, \tag{2}$$

及

$$\sin\eta=\frac{1}{2}(C-A)/q.$$

考虑

$$\left[u-v\exp\left(\frac{2\pi(2l-1)i}{n}+\eta i\right)\right]\left[u-v\exp\left(-\frac{2\pi(2l-1)i}{n}-\eta i\right)\right]$$

$$=u^2+v^2-2uv\cos\left(\frac{2\pi(2l-1)}{n}+\eta\right),$$

这儿 e^x 写成为 $\exp x$，如果取得 u,v 使

$$u^2+v^2=p,\ \ 2uv=q, \tag{3}$$

则 P 可以写成为 $Q\overline{Q}$，其中

$$Q=\prod_{l=1}^{n}(u-ve^{\eta i}e^{2\pi i(2l-1)/n}).$$

当 n 是奇数时，

$$Q=\prod_{m=1}^{n}(u-ve^{\eta i}e^{2\pi im/n})=u^n-v^ne^{ni\eta},$$

即得

$$P=(u^n-v^ne^{ni\eta})(u^n-v^ne^{-ni\eta})$$
$$=u^{2n}+v^{2n}-2u^nv^n\cos n\eta; \tag{4}$$

当 n 是偶数时，

$$Q=\prod_{l=1}^{\frac{n}{2}}(u-ve^{\eta i}e^{-2\pi in}e^{2\pi l/\frac{n}{2}})^2$$

$$=[u^{\frac{n}{2}}-(ve^{\eta i}e^{-2\pi in})^{\frac{n}{2}}]^2=(u^{\frac{n}{2}}+v^{\frac{n}{2}}e^{n\eta i/2})^2.$$

即得

$$P=(u^n+v^n+2u^{\frac{n}{2}}v^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\eta}{2})^2. \tag{5}$$

我们现在需要以下的简单引理.

引理. 当 $u>v\geqslant 0$ 及 $m\geqslant 2$ 时,

$$(u^m-v^m)^2\geqslant(u^2-v^2)^m. \tag{6}$$

这引理等价于，当 $1>x>0$ 时,

$$(1-x^m)^2\geqslant(1-x^2)^m.$$

证：由于 $x^m>x^{m+1}$，所以，若原式成立，应有

$$(1-x^{m+1})^2>(1-x^m)^2>(1-x^2)^m(1-x^2)=(1-x^2)^{m+1}.$$

原式在 $m=2$ 时显然成立. 因此，由数学归纳法可以证明 (6) 式.

把这引理用到 (4) 式，当 n 是奇数时,

$$P\geqslant u^{2n}+v^{2n}-2u^nv^n=(u^n-v^n)^2\geqslant(u^2-v^2)^n.$$

由 (3) 及 (2) 可知

$$(u^2-v^2)^2=p^2-q^2=\frac{1}{4}(A+C)^2-B^2-\frac{1}{4}(A-C)^2$$
$$=AC-B^2,$$

即得 (1) 式.

当 n 是偶数时，由 (5) 式

$$P\geqslant(u^n+v^n-2u^{\frac{n}{2}}v^{\frac{n}{2}})^2=(u^{\frac{n}{2}}-v^{\frac{n}{2}})^4$$
$$\geqslant(u^2-v^2)^n=(AC-B^2)^{\frac{n}{2}},$$

也得 (1) 式.

附记 1. 当 $m>2$ 时，引理中的不等式，当且仅当 $v=0$

时取等号，而 $v=0$ 等价于

$$q=B^2+\frac{1}{4}(C-A)^2=0,$$

即当且仅当 $B=0$，$A=C$ 时，(1)式取等号．但须注意 $n=4$ 的情况必须除外(因为 $m=2$ 了)，这时取等号的情形应当是 $\cos 2\eta=-1$，即 $\eta=90^\circ$，及 $A=C$.

回到原来的问题，当 $n\neq 4$ 时，

$$a^2+c^2=b^2+d^2,\ ab+cd=0, \tag{7}$$

即§12(6)式成立，而且仅当(7)式成立时取等号．

附记 **2**．当 $n=4$ 时，不等式§12(5)是

$$(ad-bc)^2\leqslant\frac{1}{4}[(a+b)^2+(c+d)^2][(a-b)^2+(c-d)^2],$$

当且仅当 $a^2+c^2=b^2+d^2$ 时取等号．换符号

$$\alpha=a+b,\ \beta=a-b,\ \gamma=c+d,\ \delta=c-d,$$

则得 $$(\alpha\delta-\beta\gamma)^2\leqslant(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\delta^2),$$

当且仅当 $a^2+c^2-b^2-d^2=\alpha\beta+\gamma\delta=0$ 时取等号．这就是 Hadamard 不等式．

这样的推广实际上可以说"退了一步"的推广．我们原来所讨论的问题是三维的，而我们退成二维，然后看看二维中有哪些推广的可能性．这是一般的研究方法：先足够地退到我们所最容易看清楚问题的地方，认透了钻深了，然后再上去．

我们再看另外一个例子，在这例子中我们希望把三角形，四面体……推广到 n 维空间的$(n+1)$面体的问题．

在 n 维空间取 $n+1$ 点，这 $n+1$ 点中的任意 n 点决定一平面，共有 $n+1$ 个面，这些面包有的体的容积是 V. 过

$n+1$ 点中的任意两点可以作一线段，共有$\frac{1}{2}n(n+1)$条线段．我们的问题是 V 给定了，求这$\frac{1}{2}n(n+1)$条线段乘积的最小值．

读者不要小看这问题，自己试试"四面体"便知其分量了．

§ 14 极　　限

把§12的(6)式推到 $n\to\infty$ 的情形．由积分的定义

$$|ad-bc|^{\frac{1}{2}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\Big[(a^2+c^2)\sin^2\frac{\pi(2l-1)}{n}$$
$$-2(ab+cd)\sin\frac{\pi(2l-1)}{n}\cos\frac{\pi(2l-1)}{n}$$
$$+(b^2+d^2)\cos^2\frac{\pi(2l-1)}{n}\Big]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[(a\sin\theta-b\sin\theta)^2+(c\sin\theta-d\cos\theta)^2\Big]^{\frac{1}{2}}d\theta.$$

换符号 $a^2+c^2=A$，$B=-ab-cd$，$C=b^2+d^2$，则得

$$(AC-B^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(A\sin^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta. \qquad (1)$$

从§12(5)可以得出更精密的不等式

$$\frac{1}{2}\log(AC-B^2)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(A\sin^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta)d\theta. \qquad (2)$$

我们能不能直接证明这些不等式？能！读过微积分的读者自己想想看.

§ 15 抽　　象

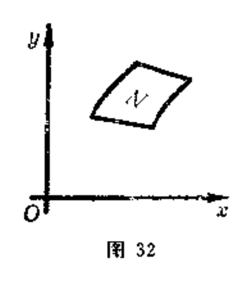


图 32

在平面上给出一块样板 N（图 32），变换

$$(T)\quad \begin{cases}\xi=ax+by+p,\\ \eta=cx+dy+q.\end{cases}\quad ad-bc\neq 0.$$

把 N 变成为(ξ,η)平面上的 $N(T)$. $N(T)$ 的面积及周界长度各命之为 $A(T)$与 $L(T)$，求

$$\frac{(A(T))^{\frac{1}{2}}}{L(T)}$$

的最大值.

取单位圆内接正 n 角形为样板，它的周长和面积各为 $2n\sin\frac{\pi}{n}$与$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. 不妨假定正 n 边形的顶点就是

$$\left(\cos\frac{2\pi l}{n},\ \sin\frac{2\pi l}{l}\right),\qquad l=0,1,2\cdots,\ n-1.$$

经变换(T)后，这 n 点各变为

$$\begin{cases}\xi_l=a\cos\frac{2\pi l}{n}+b\sin\frac{2\pi l}{n}+p,\\ \eta_l=c\cos\frac{2\pi l}{n}+d\sin\frac{2\pi l}{n}+q.\end{cases}$$

第 l 边的长度是

$$\sqrt{(\xi_l-\xi_{l-1})^2+(\eta_l-\eta_{l-1})^2}$$

$$=2\sin\frac{\pi}{n}\left\{\left[-a\sin\frac{\pi(2l-1)}{n}+b\cos\frac{\pi(2l-1)}{n}\right]^2\right.$$

$$\left.+\left[-c\sin\frac{\pi(2l-1)}{n}+d\cos\frac{\pi(2l-1)}{n}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

因此总长度是

$$L(T)=2\sin\frac{\pi}{n}\sum_{l=1}^{n}\left\{\left[-a\sin\frac{\pi(2l-1)}{n}+b\cos\frac{\pi(2l-1)}{n}\right]^2\right.$$

$$\left.+\left[-c\sin\frac{\pi(2l-1)}{n}+d\cos\frac{\pi(2l-1)}{n}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}};$$

而新的 n 边形的面积不难算出是

$$A(T)=|ad-bc|\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

因此本节开始提出的问题的解答已由§12公式（6）给出：

$$\frac{(A(T))^{\frac{1}{2}}}{L(T)}\leqslant\frac{\left(\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{2n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

当 $n\to\infty$ 时，n 边形趋于圆，$A(T)$ 与 $L(T)$ 各趋于该圆经 (T) 变换而变成的椭圆的面积 A 与周长 L，而且有不等式

$$A\leqslant\frac{1}{4\pi}L^2.$$

这式是有名的等边长问题的特例．但（5）式比（6）式更精确，其极限已如上节所述，因而改进了等边界问题的不等式．必须指出，适合原不等式的函数类是很宽的，对改进了的不等式来说范围狭窄了很多．

我们这儿只不过就平面问题作了一个简单的开端．所联系到的与格子论，群论，不等式论，变分法等有关的问题还不少呢？但写得太多是篇幅所不允许的，并且可能有人会说有些牵强附会了．实质上，千丝万缕的关系看来若断若续，而这正是由此及彼，由表及里的线索呢！总之，想，联想，看，多看，问题只会愈来愈多的．至于运用之妙，那只好存乎其人了！但习惯于思考联想的人一定会走得深些远些；没有思考联想的人，虽然读破万卷书，依然看不到书外的问题。

1963 年除夕初稿

1964 年 1 月 12 日完稿于铁狮子坟